

# GEOMETRIA

## Irakaslearentzako gida didaktikoa

### Pedagogia taldea

**Alaitz Romo Arizmendi**  
Santo Tomas Lizeoa. Donostia-San Sebastián

**Manex Mujika Amunarriz**  
Santo Tomas Lizeoa. Donostia-San Sebastián

**Mikel Arcelus Alonso**  
Tecnun. Universidad de Navarra.  
Donostia-San Sebastián

### Talde teknikoa

**Carmen Blanco del Prado**  
Tecnun. Universidad de Navarra.  
Donostia-San Sebastián

**Nicolás Serrano Bárcena**  
Tecnun. Universidad de Navarra.  
Donostia-San Sebastián

**Íñigo Gutiérrez García**  
Tecnun. Universidad de Navarra.  
Donostia-San Sebastián

**Kevin Claderón Maceda**  
Tecnun. Universidad de Navarra.  
Donostia-San Sebastián

## 1. Sarrera. Codex erraminta

Geometria proiektua Codex tresnaren bidez garatu da, eta Matematika ikasgaia ikasten ari diren Batxilergoko 1. eta 2. mailako ikasleei zuzenduta dago. Zehazki, Trigonometriako unitate didaktikoei buruzkoa da: Geometria laua eta Geometria espazioan. (3. blokea, Batxilergoko 1. eta 2. mailako matematikarako gaitasunaren edukiak). Cfr.

[https://www.euskadi.eus/contenidos/informacion/inn\\_heziberri\\_dec\\_curriculares/eu\\_def/adjuntos/Batxilergoko\\_curriculum\\_oso.pdf](https://www.euskadi.eus/contenidos/informacion/inn_heziberri_dec_curriculares/eu_def/adjuntos/Batxilergoko_curriculum_oso.pdf) Matematikarako Konpetentzia. 228. eta 237. orrialdeak.

### Codex erraminta

Eduki didaktikoak online editatzeko erraminta da Codex. Irakasleak elementu teoriko zein praktikoak sor ditzake ikasleak landu ditzan.

Codex barruko elementuak askotarikoak izan daitezke: eduki teorikoa duten apunteak, zuzenketa automatikoa duten online ariketak, Geogebra bezalako aplikazioetara lotura dutenak eta abar. Irakasleak sortzen dituen elementu horiek guztiak modu ordenatu eta egituratuan jasotzen dira eta ikasleari lan-koadernoaren erara aurkezten zaizkio.

Codex, edozein ikasgaitarako erabil daitezkeen arren, Matematikak dituen behar espezifikoak erantzuteko diseinatu da. Merkatuan online azterketak eta ebaluazioak egiteko produktu asko daude era askotako galde-erantzunak onartzen dituztenak (egia/gezurra, erantzun anitz, hutsuneak bete eta abar). Matematikarako, baina, ez dira egokiak izaten, ikasgai honetan erantzunak hainbat modutan idatz daitezkeen adierazpen algebrakoak izaten baitira. Codex-ek adierazpen algebrakoak erabiltzea ahalbidetzen du, bai enuntziatuetan eta bai automatikoki ebaluatzen diren erantzunetan ere.

Ariketen ebaluazio automatikoak abantaila ugari ditu. Horietan garrantzitsuenetako bat autoebaluatze gaitasuna garatzea da; izan ere, koaderno edo ariketak bukatzean, sistemak egindakoaren informazioa bidaltzen dio ikasleari. Informazio hori kuantitatiboa eta kualitatiboa da eta, beraz, ikasleak bere ikasketa-prozesua doitu dezake informazio hori erabiliz.

Online erraminta bat izanik, ikasleak edozein gailutan eta lekutan izango du eskura; baldintza bakarra Interneteko konexioa edukitzea da. Ikasleak, beraz, edozein unetan egin dezake lan bere koadernoko elementuetan eta utzitako lekuan berreskuratuko du.

## 2. Helburuak didaktikoak

Proiektua matematikaren arloan kokatzen denez, edukiak matematikarako gaitasunaren garapena bultzatzera bideratzen dira nagusiki. Hala ere, zeharkako nahiz diziplinazko oinarrizko gaitasunak garatzen ere laguntzen du. Jarraian, helburu didaktikoak zehazten dira. 127/2016 Dekretuaren II. eranskina osatzen duen Batxilergoko Curriculumean aipatzen diren zortzi helburuen artean (Batxilergoko 2. urterako Matematikarako Gaitasuna, 221. or.), proiektu honek modu zuzenagoan honako hauek lortzen lagun dezake:

- “Matematikari berari edo beste zientzia batzuei buruzko problemak planteatzea eta ebaztea, hipotesiak adieraziz, zenbait estrategia hautatuz eta erabiliz, ebazpen-prozesua arrazoituz, emaitzak justifikatuz eta egoera berriei aplikatzea, gaur egungo gizarteko erronken aurrean modu efizienteagoan jardun ahal izateko.” (1. helburua)
- “Hizkuntzaren beraren tresnak eta adierazpen matematikoa (zenbakiak, adierazpen algebrakoak, grafikoak, funtzioak, irudiak, ikur erabilienak, etab.) autonomiaz eta sormenez

erabiltzea, eta gai, idazkera eta adierazpen matematikoak ulertzea eta erabiltzea, norberaren pentsaera argi eta garbi eta koherentziaz adierazteko” (5. helburua)

- “Jarduera matematikoko eta ikerketa zientifikoko jarrerak eskuratzea eta erabiltzea, lanerako beharrezkoak eta ohikoak direlako; esate baterako, hizkuntza matematikoaren balioespena, egiaztatzea, datuak kontrastatzea, argudioen analisi kritikoa, prozesuen eta emaitzen berrikuspen sistematikoa, eta taldeko lanaren balioespena.” (8. helburua)

Helburu hauek matematikarako konpetentziaren osagai asko lantzeko aukera ematen dute:

- Ezagutza matematikoak ezagutzea, erlazionatzea, integratzea eta baloratzea.
- Arrazoitzeko moduak erabiltzea, bai norberaren ondorioak eta jarraitutako prozesua justifikatzeko, bai besteek aurkeztutako emaitzak kritikoki aztertzeko.
- Errealitatea kalkulatzeko, irudikatzeko eta interpretatzeko prozedura matematiko egokiak hautatzea eta erabiltzea, informazioaren eta komunikazioaren teknologiak erabilia, eraginkorrak izateko.

Helburu horiek lortzeko, ondoren deskribatzen diren ikasleei proposatzen zaizkien materiala eta jarduerak erabiliko dira.

### 3. Oinarrizko ezagutzak

Jarraian, proiektuan garatzen diren kontzeptuzko, prozedurazko eta jarrerazko edukiak deskribatuko dira.

#### 1. Kontzeptuzko edukiak

##### 1.1 Trigonometria

Angeluen neurketa: radiana eta gradua.

Angelu baten arrazoi trigonometrikoak: haien arteko erlazioak. Zirkunferentzia goniometrikoa. Funtsezko formula trigonometrikoak.

##### 1.2. Geometria

###### 1.2.1. Geometria laua

Bektore askeak planoan. Biderketa eskalarra. Bektore baten modulua. Bi bektoreren arteko angelua.

Zuzenaren ekuazioak. Zuzenen arteko posizio erlatiboak.

Distantziak eta angeluak. Planoan puntuek eta zuzenek esku hartzen duten problemak ebaztea.

Leku geometrikoaren ideia planoan. Konikoak (zirkunferentzia, elipsea, hiperbola eta parabola)

###### 1.2.2. Geometria espazioan

Bektoreak espazioan.

Eragiketak bektoreekin. Biderketa eskalarra, bektoriala eta mistoa. Esanahi geometrikoa.

Zuzenaren eta planoaren ekuazioak espazioan.

#### 2. Prozedurazko edukiak

##### 2.1. Trigonometria

Triangeluen ebazpena: sinuaren eta kosinuaren teorema.

Neurketa-problema trigonometriaren bidez ebaztea.

Ekuazio trigonometriko sinpleak ebaztea.

## 2.2. Geometria

### 2.2.1. Geometria laua

Biderketa eskalarra, bektore baten modulua eta bi bektoreen arteko angelua kalkulatzeko.  
Planoak, zuzenak eta leku geometrikoak dituzten duten problemak ebaztea.

### 2.2.2. Geometria espazioan

Eragiketak bektoreekin. Produktu eskalarra, bektoriala eta mistoa kalkulatzeko.  
Posizio erlatiboaren problemak ebaztea, bai zuzenenak, bai planoarenak.  
Angeluak, distantziak, eremuak eta bolumenak kalkulatzekoarekin lotzen diren problema metrikoak ebaztea.

## 3. Jarrerazko edukiak

Arazoak planteatzeko eta konpontzeko konfiantza izatea.  
Emitzak bilatzeko diziplina, esfortzua eta iraunkortasuna izatea.  
Tolerantzia eta lasaitasuna izatea, ariketak eta problemak ebaztean egindako akatsen eta lorpenen aurrean.  
Emitzak zuzen eta zehatz aurkeztea.

## 4. Ebaluazioa

Proiektuak hainbat ebaluazio-modu ahalbidetzen ditu: autoebaluazioa, irakasgaiaren edo gaiaren hasierako ebaluazioa, ebaluazioa hezitzailea, ebaluazio jarraitua eta ebaluazio batutzailea:

**Hasierako ebaluazioa.** Tresna honen bidez, irakasleak erraz egin dezake hasierako ebaluazio bat, trigonometriako ariketak aukeratuz, geometria laua hasi aurretik gai hori ebaluatzeko edo berrikusteko. Era berean, espazioko geometriari ekin aurretik, hasierako ebaluazio bat egin daiteke geometria lauako ariketekin. Planoen edo plano eta zuzenen arteko posizio erlatiboa aztertzeko, komenigarria izango da Rouché-Frobeniusen teorema gogoratzea ekuazio-sistema baten izaera zehazteko. Matrizeak proiektuko (EIMA2021) ariketa batzuk aukera daitezke ezagutza horiek erreparatzeko edo ebaluatzeko.

**Ebaluazioa jarraitua** egiteko arazo nagusietako bat ikasleen ariketak zuzentzeko denbora falta da, batez ere irakasle bakoitzeko ikasle-kopurua handia bada. Zuzenketa automatikoa konponbide eraginkorra da arazo honetarako. Azterketetako notak ez ezik, etxeko edo gelako ariketetan lortutakoak ere kontuan hartuko dituen ebaluazio-sistema bat diseina daiteke. Irakasleak azterketetan ez ezik, ikasleek egindako autoebaluazio-probetan eta ariketetan ere lor ditzake emitzak, baita noiz egin dituzten ere. Horrela, kontzeptuzko helburuak lortu diren ez ezik, ikaslearen eguneroko lan jarraitua eta autonomia nolakoa den ere ebalua dezake.

**Autoebaluazioa.** Tresna bereziki erabilgarria da ikasleen autoebaluaziorako, zuzenketa automatikoa baita, eta erantzuna zuzena izan zein okerra izan, zenbakizko notaz gain, lanean jarraitzera edo egindako akatsak aurkitzera bultzatzen duten iruzkinekin aberastu daiteke.

**Ebaluazio hezitzailea.** Proiektu honetan egingo den hobekuntza teknikoetako bat "live elements" edo elementu bizien erabilgarritasuna da, hau da, ikasleek koaderno bati elementu berriak (kasu honetan ariketak edo testak) gehitzeko aukera, koaderno hasita dagoenean. Horrela, ebaluazio hezitzaileko saio dinamikoak egin daitezke, eta ikasleek irakasleak proposatzen dituen erritmoan egingo dituzte ariketak. Irakasleak ikasgelako emitzak proiektatu ahal izango ditu, akats ohikoenak komentatu, etab.

**Ebaluazio batutzailea.** Irakasleak Codex-ekin egindako ariketa guztietan lortutako zenbakizko emitza guztiak eskura ditzake. Horrela, ebaluazio jarraituko sistema bat diseinatu ahal izango

du, etxeko edo gelako ariketetan lortutako notak edo hainbat gairen azterketak edo amaierako azterketak egiteko diseinatutakoak kontuan hartuta.

Ikasleak eskuratutako ezagutzak ebaluatzeko azterketa bat bada, koaderno bat izango da, sistemak zuzendu eta irakasleak lortutako emaitzak izan ditzan diseinatua, baina ikasleari ez zaizkio erakutsiko, edo koadernoan ixten denean edo irakasleak erabakitzen duen egunean erakutsiko zaizkio.

Codexek egiten duen zuzenketa bitarra bada ere, prozedura ebaluatu daiteke, eta ez bakarrik azken emaitza, tarteko emaitzak eskatzen dituzten ariketak diseinatuz.

Interesgarria da ariketen enuntziatuak parametrizatzeko aukera, ikasle bakoitzak ariketa berak izan ditzan, baina parametro desberdinekin (adibidez, denek aurkitu behar dute (a, b) puntutik pasatzen den eta m malda duen zuzenaren ekuazioa, baina ikasle bakoitzak a, b eta m parametroen balio desberdinak ditu). Horrela, azterketetan zein etxeko lanetan enuntziatuak pertsonalizatu egiten dira.

## 5. Egitura

Lehenik eta behin, sarrera bat egin da, eta, bertan, labur-labur eta adibide batzuekin, ariketen erantzun-kutxan formula aljebraikoak sartzeko sintaxia azaldu da. Bost ariketa proposatzen dira, ikaslea hizkuntzarekin ohitu dadin.

Lehen begiratuan zaila eman dezakeen arren, esperientziak ikaslearentzat zailtasun gehigarririk ez dakarrela esan digu. Gainera, prestakuntza ere bada, Matematikan parentesiak eragiketen ordena adierazteko erabiltzen jakiteak eta abarrek duten garrantzia kontuan hartuta. Ikasleak paperean landuko ditu ariketak, eta azken emaitza zuzentzeko tresnan sartuko du.

Jarraian, Geometriako blokea osatzen duten gaiak garatuko dira, jarraian adierazten direnak.

Azpiatal bakoitzean elementu teorikoen garapenarekin hasten da. Teoria azaldu ondoren, bideo edo testu baten bidez, ebaztitako ariketa edo problema batzuk ematen dira. Azkenik, dagokion gaiarekin lotutako ariketak edo problemak proposatzen dira. Elementu teoriko batzuetan Geogebra appletak txertatu dira, ikasleei kontzeptuak ulertzen eta bistaratzeko laguntzeko. Arazo batzuetan, lortutako emaitzak hausnartzen lagunduko duten grafiko dinamikoak ere sartu dira.

### 1. Trigonometria

#### 1.1. Angeluak eta arrazoi trigonometrikoak

- Angeluen neurketa: gradu sexagesimala eta radiana.
- Angelu baten arrazoi trigonometrikoak: haien arteko erlazioak. Zirkunferentzia goniometrikoa.
- Funtsezko formula trigonometrikoak. Angeluen baturaren, angeluen diferentziaren, angelu bikoitzaren eta angelu erdiaren arrazoi trigonometrikoak.

#### 1.2. Triangeluen ebazpena. Sinuaren eta kosinuaren teorema.

#### 1.3. Ekuazio trigonometrikoak.

### 2. Geometria

#### 2.1. Geometria analitikoa planoan

##### 2.1.1. Bektoreak planoan

- Bektore askeak. Eragiketak bektoreekin.
- Biderketa eskalarra. Bektore baten modulua. Bi bektoreren arteko angelua.
- Oinarri ortogonalak eta ortonormalak.

##### 2.1.2. Zuzena planoan.

- Zuzen baten ekuazio motak.
- Zuzenen arteko posizio erlatiboak.

- Distantziak eta angeluak.
- 2.1.3. Leku geometrikoa planoan. Konikoak (zirkunferentzia, elipsea, hiperbola eta parabola)
- 2.2. Geometria analitikoa espazioan
  - 2.2.1. Bektoreak espazian.
    - Eragiketak bektoreekin.
    - Biderketa eskalarra. Bektore baten modulua. Bi bektoreren arteko angelua.
    - Biderketa bektoriala
    - Biderketa mistoa.
  - 2.2.2. Zuzenak eta planoak espazioan. Posizio erlatiboa
    - Zuzen baten ekuazioak.
    - Plano baten ekuazioa
    - Zuzenen, planoen eta zuzenen eta planoen arteko posizio erlatiboak.
  - 2.2.3. Geometria metrikoa
    - Distantziak: bi punturen artekoa, puntutik zuzenera, puntutik planora, bi zuzenen artekoa.
    - Angeluak: bi planoen artean, zuzenaren eta planoaren artean, bi zuzenen artean.

## 6. Metodologia

Irakaslearen eskura tresna ireki bat jartzen da, koadernoetan bana ditzan Batxilergoko 1. eta 2. mailetarako Matematika Ikasgaiaren 3. blokeko (Geometria) irakasteko eta ikasteko prozesurako proposatzen diren ikaskuntza-elementu teorikoak eta praktikoak. Era berean, Codexekin bere programaziora hobekien egokitzen diren jarduerak sortzeko tresna erabil dezake.

Materiala eta erraminta oso malguak izanik, modu ezberdinetan erabil daiteke:

- Alderantzizko ikasgela deituriko metodologiarako material bezala, non ikasleak klasera joan aurretik edukiak lantzen dituen eta autoebaluazioak egiten. Irakasleak ikasleen errendimendua ikusi ahal izango du ikasle bakoitza non dagoen jakiteko.
- Klasean lan egiteko material bezala. Irakaslearen azalpenaren ondoren egiteko ariketa ugari daude. Erraminta honen bidez, irakasleak jakin dezake ikasle bakoitza nola ari den, eta, horrela, zailtasuna gehien dutenengana hurbildu daiteke, aurreratuen dabiltzanei ariketa berriak proposatu eta abar.
- Etxean lan egiteko material bezala. Ariketak automatikoki zuzentzen direnez eta ikasleak egindakoaren inguruko mezuak jasotzen dituzenez, ikasleak bere ikasketa prozesua doitu dezake irakasleak klasean egin dezakeen zuzenketara itxaron beharrik izan gabe. Elementuak eta koadernoak diseinatzean, irakasleak definituko du ikasleak zenbat aukera izango dituen ariketa bat egiteko. Zenbait ariketatan Geogebra-ko applet-ak txertatu dira ikasleak bere emaitza bertan konproba dezan, emaitza dagokion gelaxkan jarri aurretik.
- Ikasleak ebaluatzeko erraminta bezala. Irakasleak koaderno bat diseina dezake, ikasleak denbora jakin batean egin dezan eta automatikoki zuzendutako emaitzak irakasleak erabakitzen duenean bakarrik ikusi ahal izan ditzan.

Enuntziatuak parametrizatzeko aukera oso baliagarria da ikasle bakoitzak ariketa berdina baino parametro ezberdinak izango dituelako. Hori horrela, azterketetan zein etxerako lanetan enuntziatuak pertsonalizatuak izango dira.

Ikaskuntza-elementuak eta koadernoak diseinatzean, irakasleak erabakiko du ikasleak zenbat aldiz saia daitekeen ariketa bakoitza egiten. Ikasgelako ariketetan zein etxean lan egiteko, saio kopuru amaigabea baimentzea komeni da. Horrek asko laguntzen du ikaslearen motibazioan,

eta saiatzen jarraituko du, harik eta ziur egon arte emaitza erantzun-kutxan sartzean ariketa horretan ahalik eta nota handiena lortuko duela (zenbakizko emaitza erakusten den bakoitzean, ariketa hori balioesten denaz ere adierazten da, adibidez: 3/5).

## 7. Azken ekoizpena

Espazioko trigonometria, geometria laua eta geometria unitate didaktikoetako ehun ariketa irakasleen eskura jartzen dira. Ariketa horiek koaderno moduan aurkezten dira, azalpen teorikoekin eta zuzenketa automatikoko ariketekin. Irakasleak ikasleei koaderno horiek egitea proposa diezaieke, edo beste batzuk diseina ditzake, eskura dauden ariketak berriz elkartzuz edo ariketa berriak diseinatuz.

Koadernoak egin ondoren, ikasleek plataforma berean dituzte eskuragarri beren lanak.

## 8. Baliabideak

Codex plataforma eta haren edukiak gaur egungo edozein nabigatzailetatik eskura daitezke, eta ordenagailu, tableta edo mugikorretatik erabil daitezke. Ikasleak, beraz, gailu horietako bat beharko du materialera sartzeko.

Geometriako unitate didaktikoetan oso komenigarria da grafikoak erabiltzea (2D edo 3D), kontzeptuak eta propietateak bistaratzeko laguntzeko, bai eta Geogebra bezalako tresnak ere, grafiko horiek manipulatu eta sortzeko aukera ematen dutenak. Proiektu honetan sartzen diren ariketa askotan Geogebra appletak sartu dira ulermena errazteko edo ikasleek emaitzak grafikoki egiaztatzeko. Ikasleentzat erosoagoa izan daiteke geogebra.com webgunean zuzenean lan egitea edo Geogebra Clasic edo 3D Calculator bezalako aplikazioen bat deskargatzea, ezinbestekoa ez bada ere.

Oro har, ariketak egiteko, ikasleek arkatzarekin eta paperarekin egingo dituzte, eta, ondoren, lortutako emaitza Codexen koadernoan sartuko dute, zuzentzeko.

## 9. Taldekatzeak

Tresnak taldeak kudeatzeko aukera ematen du, ikasgela berean ikasle-talde desberdinek beren beharretara egokitutako koaderno desberdin bat egin ahal izan dezaten (adibidez, maila desberdinetakoak eta abar).

Taldean lan egin nahi izanez gero, talde bakoitzak ariketa desberdinak izan ditzake, baina taldekide guztiek berberak izan ditzakete.

## 10. Denboralizazioa

Oro har, trigonometriako unitaterako 18 ordu erabiliko dira, geometria lauerako 8 ordu eta geometriarako 24 ordu.

## 11. Baliabide gehigarriak

Irakasleak, beraz, diseinatutako materiala erabil dezake, baina nahi dituen elementuak sortu eta igo ditzake plataformara bere ikasleen beharren arabera.

Material gehigarria ere txerta dezake: bibliografia, web orriak, albisteak eta abar.

Gidaren eranskinean azaltzen da irakasleak bere materiala nola sortu.